# الفيزياء الذرية

## مقدمة

تركيب الذرة وسلوكها هو المسؤول عن ظهور العالم الظاهري ان المسافات الصغيرة جدا للذرة وخواص الأنوية يحتاج الى نوع جديد وهذا النوع هو الميكانيك الكمي الذي يحاول ان يصف صفات وسلوكيات الذرية والنووية. وتطور الميكانيك الكمي لكي يستطيع ان يفسر انبعاث وامتصاص الضوء من الذرة.

ان ابسط انواع الذرات هي الهيدروجين التي تتكون من الكترون واحد الذي يدور حول النواة التي تحتوي على بروتون واحد.

الهدف من هذه المحاضرات هو فهم الفيزياء الذرية وكذلك فهم الفيزياء الذرية يساعد على دراسة فيزياء الحالة الصلبة وفيزياء الفلك وكذلك اهميته في الكثير من التطبيقات في مجال الطب والاتصالات والليزر وغيرها.

## النظرية النسبية

اكتشفت النظرية النسبية من قبل العالم الالماني أينشتاين عام (١٩٠٥) وهذه النظرية تعتبر التحليل الواقع، سرعة الضوء في الفراغ لها نفس القيمة بغض النظر عن سرعة المصدر او حركة المراقب. لا يمكن قياس السرعات المطلقة وانما تأخذ فقط السرعات بالنسبة للجسم الاخر. النظرية تتنبأ ب،

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

كتلة الجسيم تتغير بتغير السرعة وحسب النظرية النسبية فان كتلة الجسيم حسب المعادلة اعلاه

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad m = \gamma m_o \qquad \gamma = \frac{m}{m_o}$$

تكافؤ الطاقة وكتلته النسبية

$$E_k = Fds \qquad F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} \qquad v = \frac{ds}{dt}$$

$$\therefore dE_k = vd(mv) = v^2 dm + vmdv \qquad (1)$$

$$m^2 = \frac{m^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_o^2}{\frac{c^2-v^2}{c^2}} = \frac{m_o^2 c^2}{c^2-v^2}$$

$$m^2c^2 - m^2v^2 = m_o^2c^2$$

$$m^2c^2 = m_o^2c^2 + m^2v^2 \qquad (2)$$

$$2mdmc^2 = 2mdmv^2 + 2vdvm^2 \qquad (3)$$

$$c^2dm = v^2dm + mvdv \qquad (4)$$

نلاحظ ان المعادلة (1) تساوي المعادلة (4) اذا نحصل على

$$dE_k = c^2dm \qquad (5)$$

ان المعادلة (5) تمثل التغير النسبي للطاقة الحركية وبتكامل الطرفين

$$E_k = \int_0^{E_k} dE_k = c^2 \int_{m_o}^{m} dm = c^2(m - m_o)$$

$$\therefore E_k = mc^2 - m_oc^2 \qquad (6)$$

$$\therefore E = mc^2 = m_oc^2 + E_k \qquad (7)$$

حيث ان $E_k$ الطاقة الحركية و $m_oc^2$ الطاقة الكامنة و E الطاقة الكلية

$$\boxed{E_k = \frac{m_oc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_oc^2} \qquad (8)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \left(1+\frac{v^2}{2c^2}+\frac{3v^4}{8c^2}+\text{•••••••}\right)$$

$$E_k = m_o c^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3v^4}{8c^2} + \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\right)$$

لإيجاد العلاقة بين الطاقة الكلية للجسم وزخمة نضرب المعادلة (2) في $c^2$ نحصل على

$$E^2 = p^2c^2 + m_o c^4 \qquad E = mc^2 = m_o c^2 + E_k$$

$$E^2 = m_o^2 c^4 + 2m_o c^2 E_k + E_k^2$$

$$\therefore p = \sqrt{2m_o E_k + \frac{E_k^2}{c^2}}$$

الحد الثاني يدعى بحد التصحيح

مثال/ الكترون طاقته السكونيه 0.511MeV وطاقته الحركية تساوي 200keV اوجد سر عته

Solution

$$E = mc^2 = m_o c^2 + E_k$$

$$\frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_o c^2 + E_k \qquad \gamma m_o c^2 = m_o c^2 + E_k$$

$$\gamma = 1 + \frac{E_k}{m_o c^2} \qquad \gamma = 1 + \frac{200}{511} = 1 + 0.391 = 1.391$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad \beta^2 = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0.695$$

$$\beta = \frac{v}{c} \Rightarrow v = \beta c = 0.695 \times 3 \times 10^8 = 2.085 \times 10^8 m / \sec$$

مثال\ ماهي الطاقة الحركية لنيوترون يمتلك سرعة مقدارها $6\times10^7$ m/sec حيث ان $m_n$=939.55 MeV

Solution

$$\beta=\frac{v}{c}=\frac{6\times10^7}{3\times10^8}=0.2 \qquad E_k=(\gamma-1)m_oc^2=\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)m_oc^2$$

$$(1.021-1)939.55=19.73MeV$$

## اشعاع الجسم الاسود

حاول الكثير من العلماء اكتشاف قوانين الاشعاعات الحرارية الاساسية مستندين على خصائص كانت معروفة ومن اهمها

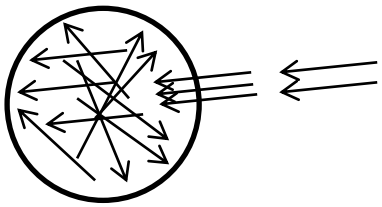
١- يزداد الجسم توهجا بارتفاع درجات الحرارة وايضا تتغير كمية الاشعاع المنبعث مع تغير درجة الحرارة
٢- يتغير لون الانبعاث مع زيادة درجة الحرارة مثال على ذلك في حالة تسخين قطعة من الحديد نلاحظ تدريجيا تغير لونها من الداكن والاحمر والبرتقالي والاصفر الى اللون الابيض.

فاذا اخذ جسيم معدني براق وسلط عليه ضوء فانه سوف ينعكس تقريبا جميع الضوء الساقط على القطعة المعدنية اما اذا سقط هذا الضوء على جسم اسود فانه سوف يمتص جميع الضوء وقد لا ينعكس منه شيء على الاطلاق.

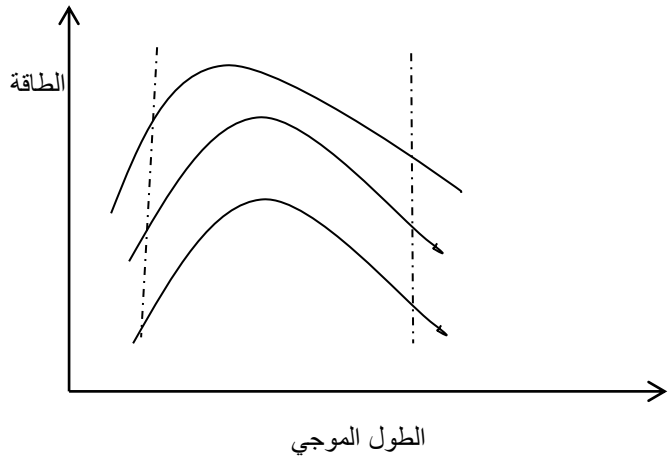
من خلال هذه التجربة انتبه العلماء الى الجسم الاسود بما انه يمتص جميع الاشعة فانه يسخن بدرجة حرارة اكبر من الجسم الاخر اذا تعرض الى نفس درجة الحرارة. اما اذا اعتبر كمصدر للإشعاع الضوئي فان شدته ستكون اكبر اذا رفع الى نفس درجة الحرارة بالنسبة الى الجسم الاخر.

قام العلماء باختيار كرة مجوفة فيها فتحة صغيرة وجدرانها الداخلية مكسوة بالرخام الاسود فاذا دخل الاشعاع من خلال الفتحة فمهما كان طول موجته فانه يمتص من قبل جدران الداخلية بعد ان يعاني انعكاسات عديدة.

الجسم الاسود يمتص جميع الاطوال الموجية فعند رفع درجة حرارة الكرة وبصورة منتظمة فأنها ستبعث اشعاعات من خلال الفتحة الصغيرة تحتوي على جميع الاطوال الموجية



اذا رسمنا مخطط بياني لطيف الانبعاثات الحرارية لجسم اسود في درجات حرارة مختلفة بين الطاقة والطول الموجي بعد ان تأخذ حزمة ضيقة من جسم ساخن ونمررها في مطياف خاص لفرز موجاتها تقاس الطاقة المشعة في هذه الحزمة بمحرار خاص فنلاحظ من الرسم




١- تبدأ الطاقة من الصفر عندما يكون الطول الموجي صفرا ويقترب من الصفر عند اللانهاية
٢- تقع النهاية العظمى بين هاتين القيمتين
٣- ترتفع النهاية العظمى للمنحنيين كلما ارتفعت درجة الحرارة وتنزاح باتجاه الاطوال الموجية القصيرة.

سؤال لماذا لا تشع جميع الاجسام طاقتها الداخلية حتى النهاية وتبرد الى درجة الصفر المطلق

الجواب على هذ هو ان السبب في ذلك يعود الى المحيط، اذا افترضنا وجود الجسم داخل الغرفة حتى ان جدران الغرفة وبقية الاجسام الموجودة تشع هذه الطاقة وتعترض الجسم وتمتص وتحول الى طاقة داخلية فاذا كان الجسم في درجة حرارة اكبر من درجة حرارة الغرفة فان الجسم سوف يبدأ في بث حرارته الى المحيط.

مثال على ذلك مصباح كهربائي يجهز بقدرة كهربائية فانه سوف يحول طاقته الكهربائية الى طاقة ضوئية يبثها الى المحيط على اعتبار ان المعدل الزمني للانبعاث اكبر من المعدل الزمني للامتصاص ويكون في حالة توازن اذا كان المعدل الزمني للامتصاص يساوي المعدل الزمني للانبعاث.

نفرض وجود عدة اجسام معتمة امتصاصيتها على التوالي هي ..... $a_1, a_2, a_3,$ وذات انعكاسية ..... $r_1, r_2, r_3,$ في حالة توازن مع بعضها ومع المحيط فاذا سقط شعاع ذات طول موجي صغير وذات شدة فان جزء كبير من الاشعاع سوف يمتص من قبل الجسم وجزء صغير سوف ينعكس فيكون مجموع معدل الانعكاس والامتصاص للجسم يساوي واحد.

$$a_1+r_1=1$$

شدة الاشعاع **I** قدرة الانبعاث للطول الموجي $w_{\lambda}$ مساحة الجسم الاول $\Delta A_1$ الاشعاع الكلي في حالة الانبعاث

$$w_1 \Delta A_1 \Delta t \qquad (1)$$

امتصاص الجسم

$$a_1 I \Delta A_1 \Delta t \qquad (2)$$

في حالة التوازن

$$w_1 \Delta A_1 \Delta t = a_1 I \Delta A_1 \Delta t \qquad (3)$$

$$w_2 \Delta A_2 \Delta t = a_2 I \Delta A_2 \Delta t \qquad (4)$$

وبقسمة (3)على (4)

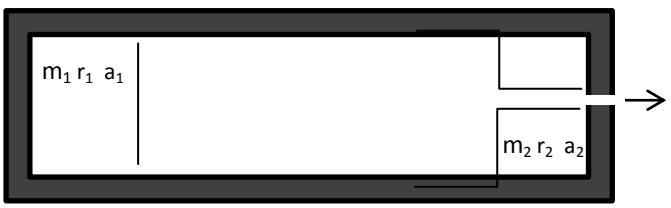
$$\frac{w_1}{a_1} = \frac{w_2}{a_2} \qquad (5)$$

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{a_1}{a_2} \qquad (6)$$

والما كان a بالنسبة للجسم الاسود يساوي واحد

$$\therefore \frac{w_1}{w_2} = 1 = w_b$$

نفرض لدينا تجويف على شكل لوحين مستويين متوازيين من مادتين مختلفتين وان الشعاع ينتقل ذهابا وايابا بين المستويين في درجة الحرارة المتساوية



| المنبعثة $M_2$ | المنبعثة $M_1$ |
|---|---|
| $W_1\Delta t \rightarrow$ نحو (٢) | نحو (١) $\leftarrow W_2\Delta t$ |
| $(1-a_2)\ W_1\Delta t\leftarrow$ | $(1-a_1)\ W_2\Delta t\ \rightarrow$ |
| $(1-a_1)(1-a_2)\ W_1\Delta t\rightarrow$ | $(1-a_1)(1-a_2)\ W_2\Delta t\leftarrow$ |
| $(1-a_1)(1-a_2)^2\ W_1\Delta t\leftarrow$ | $(1-a_1)^2(1-a_2)\ W_2\Delta t\rightarrow$ |
| $(1-a_1)^2(1-a_2)^2\ W_1\Delta t\rightarrow$ | $(1-a_1)^2(1-a_2)^2\ W_2\Delta t\leftarrow$ |
| $(1-a_1)^2(1-a_2)^3\ W_1\Delta t\leftarrow$ | $(1-a_1)^3(1-a_2)^2\ W_2\Delta t\rightarrow$ |

خطوط الاشعاع المنبعثة من وحدة مساحة كل وجه من خلال فترة زمنية $\Delta t$ من اجل ان يعبر الشعاع بين لوحين متوازيين اي ان الاشعاع سوف يسقط على الوجه الاول ويفقد من طاقته وينعكس جزء من اخر منه ومن خلال حدوث هذه الاجتيازات المتعاقبة للإشعاع الاول من كل وجه حتى وصول الى حالة الاستقرار سوف يمر خلال النفق وباتجاه اليمين.

$$\begin{aligned} w_r\Delta t &= w_1\Delta t + (1-a_1)(1-a_2)w_1\Delta t + (1-a_1)^2(1-a_2)^2 w_1\Delta t + \ldots\ldots \\ &+(1-a_1)w_2\Delta t + (1-a_1)^2(1-a_2)w_2\Delta t + (1-a_1)^3(1-a_2)^2 w_2\Delta t \ldots\ldots \end{aligned} \quad (7)$$

Let $x = (1-a_1)(1-a_2)$

$$w_r = w_1(1+x+x^2+\ldots\ldots) + w_2(1-a_1)(1+x+x^2+\ldots\ldots \quad (8)$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-(1-a_1)(1-a_2)} = \frac{1}{1-(1-a_1-a_2+a_1a_2)} = \frac{1}{a_1+a_2-a_1a_2} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} w_2 &= a_2 w_b \\ w_1 &= a_1 w_b \end{aligned} \quad (10)$$

$$w_r = \frac{a_1 w_b + a_2 w_b(1-a_1)}{a_1+a_2-a_1a_2} = \frac{w_b(a_1+a_2-a_1a_2)}{a_1+a_2-a_1a_2} = w_b \quad (11)$$

لقد ثبت تجريبيا من قبل العالم ستيلان ونظريا من قبل العالم بولتزمان ان الطاقة المشعة في وحدة الزمن E للجسم الاسود المشع يتناسب مع درجة الحرارة المطلقة $T^4$

$$E \propto T^4 \qquad E = \sigma T^4$$

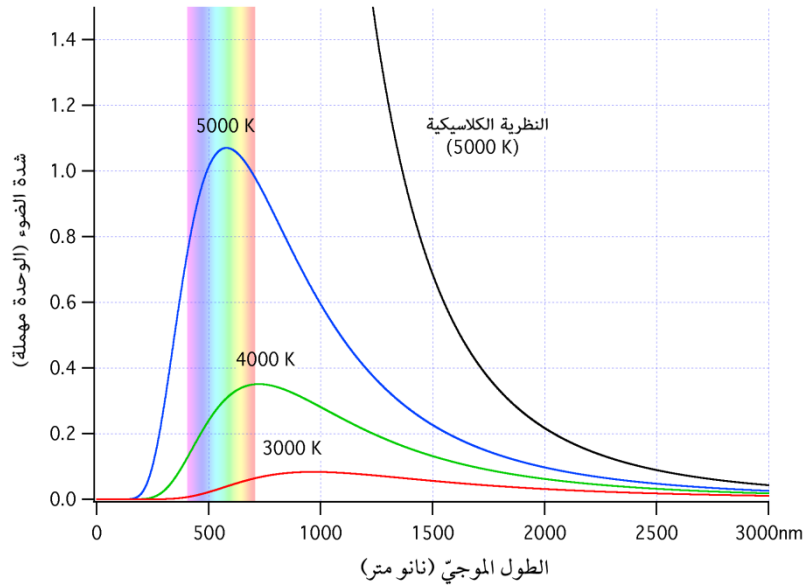
حيث ان $\sigma$ هو ثابت بولتزمان ويساوي $\sigma=(5.6696\pm0.001)*10^{-8}\ wat.m^{-2}.k^{-4}$

الطاقة الكلية المنبعثة خلال وحدة الزمن من وحدة المساحة الباعثة تتناسب مع المساحة تحت المنحني.

تفسير اسباب اشعاع الجسم الاسود وسبب استمرارية طيفه واعتماده على درجات الحرارة فمن العلماء الذين حاولوا وضع الاسس النظرية في تفسير المنحنيات طيف الاشعاع الحراري المنبعث من الجسم الاسود هم

(١) فين: كانت محاولاته وفق الفيزياء الكلاسيكية جميع الاجسام تحتوي على شحنات كهربائية كالإلكترونات والبروتونات وفي درجات الحرارة تتذبذب هذه الشحنات بسرعة فتزداد كلما ارتفعت درجة الحرارة وحسب نظرة ماكسويل تبعث الشحنات المتذبذبة موجات كهرومغناطيسية وفي جميع الترددات على حساب مقدار الطاقة المصاحبة لكل تردد في درجات حرارة معينة.

وضع فين تفسير منحني توزيع طاقة الاشعاع الحراري ونجحت نظريته مع المنحني التجريبي لكنها فشلت في الاطوال الموجية الكبيرة ولاحظ ايضا بارتفاع درجة الحرارة يبقى المنحني محافظا على شكله العام ولكن نهايته العظمى تنزاح نحو طول موجي اقصر بارتفاع درجة الحرارة




$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}$$

(٢) محاولة رايلي-جينز

تم التطرق الى الجسم الاسود حيث تنعكس الاشعة الحرارية عند الجدران الداخلية لفجوة الجسم الاسود ذهابا وايابا مكونة موجات مستقرة لكل تردد اما العلاقة التي توصل اليها هي ان الشدة الاشعاعية المنبعثة عن الجسم الساخن تتناسب طرديا مع درجة الحرارة وعكسيا مع القوه الرابعة للطول الموجي للأشعة المنبعثة حيث ان منحنيات الاشعاعية التجريبية

$$F(\lambda) = \frac{2\pi ckT}{\lambda^4}$$

c is speed of light

k is Boltzmann's constant

كلما يقل الطول الموجي تستمر في الصعود الى ان تصل الى نهايتها العظمى ثم تبدأ بالهبوط لكن حسب قانون رايلي-جونز ان شدة الاشعاع الحراري يزداد كلما قصر الطول الموجي ويستمر في الصعود الى اللانهاية.

(٣) محاولة بلانك

هناك معادلتين معادلة تتفق مع الترددات العالية وتخفق مع الترددات الواطئة اما المعادلة الاخرى تتفق مع الترددات الواطئة وتخفق مع الترددات العالية.

لما كانت الشحنات تتذبذب في جميع الترددات والطاقات المحتملة فمن المتوقع موجات كهرومغناطيسية مستمرة لتغطي طيف الجسم الاسود لكن بلانك لاحظ ان الطاقة تمتص وتنبعث على شكل حزم ضوئية صغيرة اي ان عملية الامتصاص والانبعاث تحدث بصورة غير مستمرة فنجح بلانك في وضع قانون مغاير الى الفكرة الكلاسيكية التي تعتمد على استمرارية الموجات الكهرومغناطيسية. فأفترض بلانك ان الاشعاع ذات التردد ($\gamma$) ينبعث ويمتص على شكل كمات

*0, hγ, 2hγ, ……*

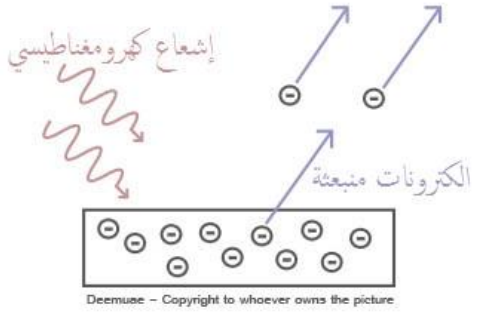
$h = 6.62*10^{-34}$ *J.s* *blank's constant*

فيكون كم الضوء البنفسجي اكبر من كم تردد الضوء الاحمر فعند انتقال المتذبذب من طاقة الى اخرى او من الاسفل الى الاعلى فانة يمتص طاقة اي الانتقال من المستوي الاسفل الى المستوي الاعلى.

## تأثير الاشعاع على المادة

يأثر الاشعاع على المادة بثلاث طرق حسب طاقة الاشعاع الساقط على المادة وهذه الطرق هي:

### ١- تأثير الظاهرة الكهروضوئية




$$p_\gamma = p_\alpha + p_e \qquad (1)$$

$$E_\gamma = T_e + T_\alpha + E_B$$

$$E_\gamma = T_e + E_B \qquad T_e = E_\gamma - E_B$$

حيث ان $E_\gamma$ و $p_\gamma$ هي طاقة وزخم الاشعاع الساقط على التوالي $T_e$ و $p_e$ هي الطاقة الحركية والزخم للإلكترون المتحرر $E_B$ طاقة ارتباط الالكترون بالذرة، $P_\alpha$ زخم ارتداد الذرة.

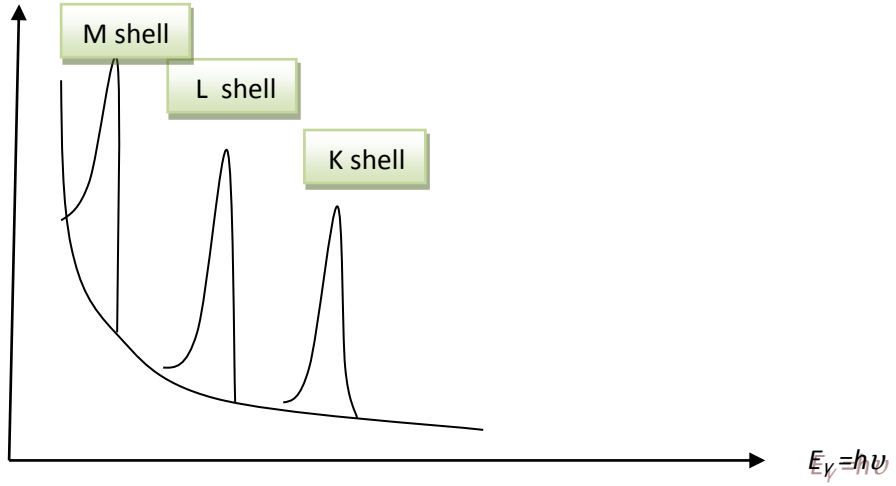
احتمالية حدوث الظاهرة الكهروضوئية عندما تكون طاقة الفوتون تتراوح بين 0.1 الى نصف مليون الكترون فولت في هذه العملية يمتص الكترون فولت من احد الكترونات الذرة وان الذرة سوف تأخذ قسم من الزخم الارتدادي وحسب قانون حفظ الزخم المعادلة (1) وحسب قانون حفظ الطاقة فان الطاقة الكلية تساوي الطاقة الحركية زائدا طاقة الارتداد للذرة زائدا طاقة الترابط، يمكن اهمال طاقة الارتداد لصغرها.

$$\boxed{T_e = h\upsilon - E_B}$$

يمكن ان تحدث الظاهرة الكهروضوئية في المدارات الاخرى مثل M و L وهكذا اذا كانت الطاقة الساقطة اقل من طاقة ترابط الالكترون في المدار M سوف ينتقل الى المدار الاخر وكما موضح في الشكل التالي

| *L=* | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* | *10* | *11* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *symbol* | *s* | *p* | *d* | *f* | *g* | *h* | *I* | *k* | *L* | *M* | *N* | *o* |

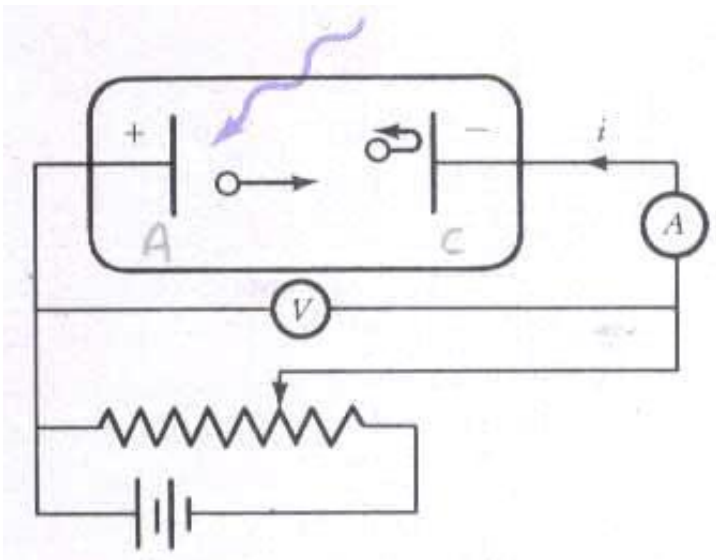
*L is the total angular momentum*




عندما تزيد اشعة كاما على نصف مليون الكترون فولت فان الالكترونات الضوئية يتم انبعاثها من المدار k فلو تصورنا ان الالكترون الذي يدور حول النواة ذات تردد مقداره $\upsilon_o$ ويسقط عليه اشعاع بتردد $\upsilon$ فعندما يكون تردد الاشعاع الساقط يساوي $\upsilon_o$ سوف يحدث اعظم انتقال للطاقة وتحدث حالة رنين.

حسب نظرية ماكسويل تزداد سرعة الالكترونات بزيادة شدة الاشعة الساقطة لكن النتيجة مخالفة حيث ان عدد الالكترونات يزداد بزيادة الشدة الساقطة أي ان عدد الالكترونات المنبعثة في الثانية يتناسب طرديا مع الشدة الساقطة وان سرعة الالكترونات تزداد بزيادة تردد الاشعة الساقطة ويوجد حد للانبعاث الالكترونات يسمى حد العتبة بدون ذلك لا يمكن للإلكترون الانفصال عن الذرة.

الشكل التالي يوضح التجربة العملية على حدوث الظاهرة الكهروضوئية



عندما يسقط شعاع كهرومغناطيسي أحادي اللون Monochromatic على سطح معدن الأنود متصل مع الطرف الموجب للبطارية وموجود داخل وعاء مفرغ من الهواء وذلك لمنع تصادم الالكترونات المتحررة بجزيئات الهواء .عندما تتحرر الالكترونات من سطح المعدن وتتمكن من الوصول إلى اللوح السالب الكاثود وفي الأغلب يكون من نفس مادة الأنود، فإن تيارا كهربائيا يمر في الدائرة ويمكن قياسه من خلال الأميتر والذي يعبر عن شدة التيار الفوتو ضوئي المار في الدائرة وكلما ازدادت عدد الالكترونات المتحررة من سطح المعدن كلما كان التيار الناتج اكبر . لاحظ هنا أن اتجاه التيار الاصطلاحي في عكس اتجاه حركة الالكترونات.

لاحظ أن

١. طاقة الالكترونات المتحررة من الأنود مختلفة

٢. القوة الكهربية الناتجة عن المجال الكهربي بين الكاثود و الأنود تعمل في عكس اتجاه حركة الالكترونات.

٣. طاقة حركة الالكترونات تكون مساوية للشغل المبذول عليها بواسطة المجال الكهربي من خلال العلاقة التالية: $1/2mv^2=eV$

ولقياس الطاقة الحركية للإلكترونات تكون عن طريق تبطئ الالكترونات وتوقيفها ويتم ذلك بعكس القطبيين للجهد المسلط على الصفيحتين حتى تصل الى قراءة صفر

مثال\ اذا كان تردد العتبة للصوديوم يساوي $4.4*10^{14}Hz$ (١) ما هو الشغل المبذول لتحرير الكترون (٢) اذا كان تردد الضوء الساقط $10^{15}Hz$ فما اكبر طاقة حركية يمنحها الفوتون للإلكترون

Solution\

$$E = h\upsilon = 6.62\times10^{-34} J.s \times 4.4\times10^{14}\ \sec^{-1} = 2.9\times10^{-19}\ joule$$

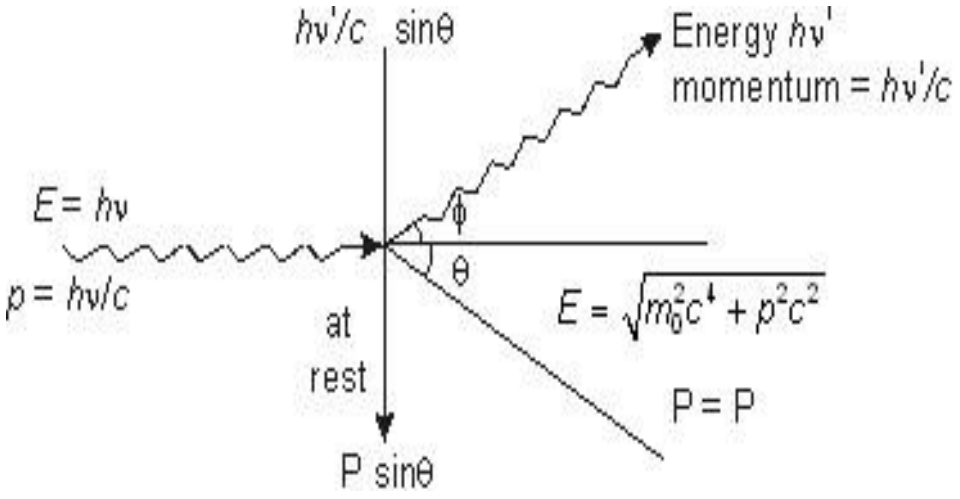
$$h\upsilon = 6.62\times10^{-34} J.s \times 10^{15}\ \sec^{-1} = 6.6\times10^{-19}\ joule$$

$$T_e = h\upsilon - E_B = 6.6\times10^{-19} - 2.9\times10^{-19} = 2.3eV$$

مثال\ ماهي طاقة فوتون من الاشعة تحت الحمراء اذا كان طول موجته $10^{-6}$

## ٢- تأثير كومتن

عندما تكون طاقة الفوتون اكبر بمقدار معيين من طاقة الارتباط يمكن ان يحدث تصادم غير مرن للأشعة مع الالكترون حيث نلاحظ بعد سقوط الفوتون واصطدامه بالإلكترون يتشتت بزاوية $\theta$ ويتشتت الفوتون بزاوية $\phi$ و $\upsilon$ يمثل تردد الفوتون الساقط و $\bar{\upsilon}$ تمثل تردد الفوتون المتشتت




$$T_e = h\upsilon - h\upsilon' \qquad (1)$$

$$E = h\upsilon = pc \qquad h = p\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{c}{\upsilon}$$

$$p = \frac{h\upsilon}{c} \qquad (2)$$

$$\frac{h\upsilon}{c} = \frac{h\upsilon'}{c}\cos\phi + p\cos\theta \qquad (3)$$

$$pc\cos\theta = h\upsilon - h\upsilon'\cos\phi \qquad (4)$$

$$\frac{h\upsilon'}{c}\sin\phi = p\sin\theta \Rightarrow pc\sin\theta = h\upsilon'\sin\phi \qquad (5)$$

بتربيع المعادلتين (4) و (5) وجمعهما نحصل على

$$p^2c^2 = (h\upsilon)^2 - 2(h\upsilon)(h\upsilon')\cos\phi + (h\upsilon')^2 \qquad (6)$$

ومن المعلوم ان الطاقة الكلية = الطاقة الحركية + الطاقة السكونية

$$E = m_oc^2 + T_e \qquad (7)$$

$m_o$ كتلة السكون للجسم وتعرف الطاقة الكلية حسب افتراض ديراك

$$E = \sqrt{m_o^2 c^4 + p_e^2 c^2} \qquad (8)$$

$$(m_o c^2 + T_e)^2 = m_o^2 c^4 + p_e^2 c^2$$
$$m_o^2 c^4 + 2m_o c^2 T_e + T_e^2 = m_o^2 c^4 + p_e^2 c^2$$
$$p_e^2 c^2 = T_e^2 + 2m_o c^2 T_e \qquad (9)$$
$$T_e = h\upsilon - h\upsilon'$$
$$T_e^2 = (h\upsilon)^2 - 2(h\upsilon)(h\upsilon') + (h\upsilon')^2 \qquad (10)$$

وبالتعويض (9) و (10)

$$p_e^2 c^2 = (h\upsilon)^2 - 2(h\upsilon)(h\upsilon') + (h\upsilon')^2 + 2m_o c^2 \left(h\upsilon - h\upsilon'\right) \qquad (11)$$

نعوض عن pc بالمعادلة (6) في (11) نحصل على

$$(h\upsilon)^2 - 2(h\upsilon)(h\upsilon')\cos\phi + (h\upsilon')^2 = (h\upsilon)^2 - 2(h\upsilon)(h\upsilon')$$
$$+(h\upsilon')^2 + 2m_o c^2 \left(h\upsilon - h\upsilon'\right)$$

$$\therefore 2m_o c^2 \left(h\upsilon - h\upsilon'\right) = 2(h\upsilon)(h\upsilon')(1-\cos\phi) \qquad (12)$$

وبالقسمة على $2c^2h^2$

$$\frac{m_o c}{h}\left(\frac{\upsilon}{c} - \frac{\upsilon'}{c}\right) = \frac{\upsilon\upsilon'}{c^2}(1-\cos\phi) \qquad (13)$$

$$\frac{m_o c}{h}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = \frac{(1-\cos\phi)}{\lambda\lambda'} \qquad (14)$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_o c}(1-\cos\phi) \qquad (15)$$

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_o c}(1-\cos\phi)$$

وبنقل $1/\upsilon$ والقسمة على $h$ $\quad \lambda = c/\upsilon$

$$\frac{1}{h\upsilon'} - \frac{1}{h\upsilon} = \frac{1}{m_o c^2}(1-\cos\phi)$$

$$\therefore h\upsilon' = \frac{h\upsilon}{1+\frac{h\upsilon}{m_o c^2}(1-\cos\phi)} \qquad (16)$$

Let $\quad \alpha = \frac{h\upsilon}{m_o c^2} \qquad h\upsilon'_{\max} = h\upsilon \Rightarrow \cos\phi = 1 \Leftrightarrow \phi = 0$

$$h\upsilon'_{\min} = \frac{h\upsilon}{1+2\alpha} \qquad \textit{when} \quad \phi = 180^o$$

$$T_e = h\upsilon - \frac{h\upsilon}{1+\alpha(1-\cos\phi)} \Rightarrow T_e = h\upsilon\frac{\alpha(1-\cos\phi)}{1+\alpha(1-\cos\phi)}$$

مثال\ فوتون ذات طاقة 3مليون الكترون فولت سقط وحصلت ظاهرة كومتن اوجد طاقة الفوتون وطاقة الالكترون المتشتت عند الزاوية $90^o$ و $180^o$ الطاقة السكونية ($m_o c^2 = 0.511 MeV$).

*Solution*

$$E'_\lambda = h\upsilon' = \frac{h\upsilon}{1+\frac{h\upsilon}{m_o c^2}(1-\cos\phi)} = \frac{3}{1+\frac{3}{0.511}(1-0)} = 0.437 MeV$$

$$T_e = h\upsilon - h\upsilon' = 3 - 0.437 = 2.503 MeV$$

## ٣- انتاج الزوج

في حالة امتصاص طاقة مساوية الى ضعف الكتلة السكونية للإلكترون (0.511MeV) سوف ينتج زوج من الكترون وبوزترون مساويا الى

$2m_oc^2=1.02MeV$

فوضعت معادلة الكترون ديراك حلا لهذه المسالة وافترض ديراك ان الالكترون يمكن ان يتواجد في احد المستويين للطاقة

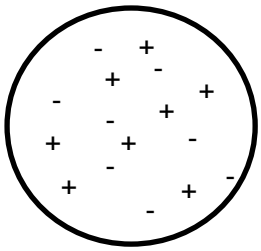
١- ذات طاقة موجبة وكتلتها السكونية $m_oc^2$ فيكون طاقة الالكترون اما اكبر او مساويا الى $m_oc^2$ .

$E \geq m_oc^2$

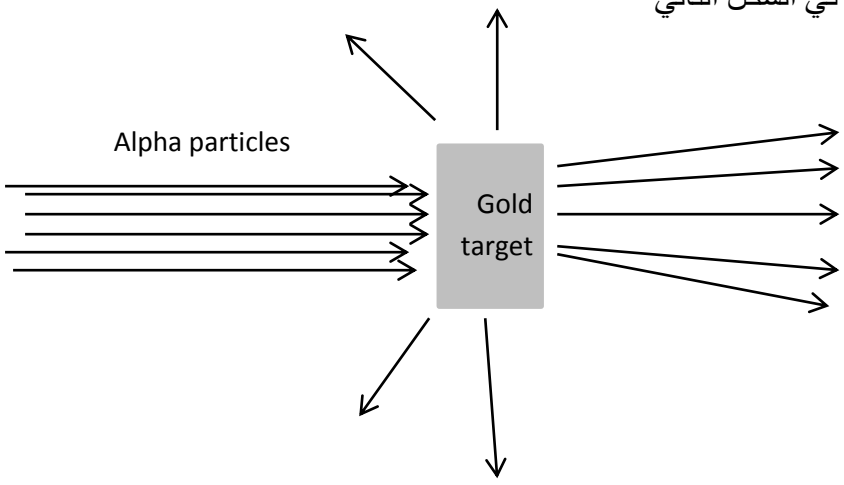
٢- مستوى ذات طاقة سالبة $m_oc^2$ فيكون $E \leq m_oc^2$ تسمى المنطقة بينهما بالمجال غير المسموح

## النماذج الذرية

١- **نموذج تومسن** :-وصف تومسن الذرة على شكل الكترونات مغمورة داخل كرة من الشحنات الموجبة



٢- **نموذج رذرفورد**:- اجرى رذرفورد تجربته بأطلاق جسيمات الفا على رقائق من الذهب كما في الشكل التالي



لاحظ رذرفورد من خلال تجربته

١- ان معظم جسيمات الفا تنفذ من الرقائق دون انحراف كأنها مرت من فراغ
٢- بعض جسيمات الفا تنحرف من مسارها بزاوية كبيرة جدا.
٣- عدد قليل من جسيمات الفا ترتد الى الخلف.

فكان افتراض رذرفورد للذرة حسب نتائج تجربته هو

١- معظم حجم الذرة فراغ .
٢- شحنة الذرة الموجبة ومعظم كتلتها تتركز في منطقة صغيرة جدا من الذرة تسمى النواة
٣- جميع الالكترونات تدور في الفراغ الكبير حول النواة.

ومن عيوب او نقاط ضعف نموذج رذرفورد هي

١- لم يستطيع تفسير استقرار الذرة . فحسب النظرية الكهرومغناطيسية الالكترونات التي تدور في مداراتها لها تعجيل فتشع طاقة فيتناقص نصف قطرها تدريجيا حتى تلتحم بالنواة.
٢- لم يستطيع تفسير الخطوط الطيفية.

٣- **<u>نموذج بور</u>**:- قام العالم بور بالاستنتاج من خلال التجارب على ان الذرة تتكون من نواة متناهية في الصغر نصف قطرها بحدود ($10^{-12}$ cm) وتحتوي هذه النواة على الشحنات الموجبة للذرة ومعظم كتلتها اما نصف قطر الذرة فهو بحدود ($10^{-8}$cm) حيث تدور هذه الالكترونات بسرعة وشبه هذه المنظومة بحركة الكواكب حول الشمس.
وفسر بور استقرار الذرة بان القوة الطاردة المركزية الناتجة من الحركة الدائرية حول النواة بانها تساوي بالمقدار وتعاكس بالاتجاه قوة التجاذب الكهروستاتيكية بين النواة الموجبة والالكترونات السالبة. واعطى بور صورة عن الذرة مستخدما المفاهيم الحديثة التي جاءت بها النظرية الكمية فاقترح بور ما يأتي:
١- ان الالكترون لا يشع طاقته باستمرار ولا يتخذ مسار حلزوني حول النواة اذا لابد من وجود حالات ثابتة في الذرة تثبت فيها طاقة الالكترون.
٢- يتطلب وجود هذه الحالات الثابتة ان الطاقة تنبعث من الذرة فقط اذا انتقل الالكترون من هذه الحالة الى حالة اخرى اقل طاقة وتكون هذه الطاقة المصاحبة لهذه العملية تساوي

$$h\upsilon = E_1 - E_2$$

فتكون فرضيات بور هي
١- تدور الالكترونات حول النواة في مدار دائري.
٢- لكل من هذه المدارات طاقة محددة.
٣- لكل من هذه المدارات نصف قطر محدد.
٤- تدور الالكترونات في مدارات لها زخم زاوي له مضاعفات صحيحة للمقدار

$$(mvr = n\hbar = n\frac{h}{2\pi})$$

حيث n عدد صحيح

٥- تفقد الذرة او تكتسب طاقة بكميات محددة عندما ينتقل الالكترون من مستوي طاقة محدد الى مستوى طاقة محدد اخر.

ولغرض حساب المدارات المسموحة التي تنبأ بها العالم بور استخدم ذرة الهيدروجين والتي تكون عبارة عن شحنة موجبة واحدة يدور حولها الكترون واحد وافترض ان النواة تكون ثابتة وان الالكترون يدور حول النواة بنصف قطر قدره r.

$$Q = -Ze = -e \tag{1}$$

Z is atomic number, Q is the total charge

استخدم بور قانون نيوتن الثاني وقانون كولوم

$$f = ma \tag{2}$$

$$a = \frac{v^2}{r}$$

$$f = \frac{(-Ze)e}{4\pi\varepsilon_o r^2} \tag{3}$$

$$f = -k\frac{e^2}{r^2} \tag{4}$$

v is electron velocity

$$\therefore -k\frac{e^2}{r^2} = -m\frac{v^2}{r}$$

$$mv^2 = k\frac{e^2}{r} \tag{5}$$

ومن فرضيات بور لأجل ان يدور الالكترون في احد المدارات يجب ان يمتلك زخم زاوي له مضاعفات $n\hbar$

$$L = mvr = n\hbar = n\frac{h}{2\pi} \tag{6}$$

$$\therefore v = \frac{nh}{2\pi mr} \Rightarrow\Rightarrow v^2 = \frac{n^2h^2}{4\pi^2m^2r^2} \tag{7}$$

From equation (5)

$$v^2 = \frac{ke^2}{rm} \tag{8}$$

وبتساوي المعادلتين (7) و (8) نحصل على

$$\frac{ke^2}{rm} = \frac{n^2h^2}{4\pi^2m^2r^2}$$

$$ke^2 = \frac{n^2h^2}{4\pi^2mr}$$

$$\boxed{\therefore r = \frac{n^2h^2}{4\pi^2mke^2}} \tag{9}$$

**الطاقة الكلية حسب نموذج بور**

الطاقة الكلية تمثل مجموع الطاقة الحركية + الطاقة الكامنة

$$E = T + V \tag{10}$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

ومن نموذج بور المعادلة (5) لدينا

$$mv^2 = k\frac{e^2}{r}$$

$$T = \frac{ke^2}{2r} \qquad (11)$$

وطاقة الجهد على بعد r من الشحنة Q هي

$$k\,\frac{Q}{r}$$

$$k\,\frac{Q}{r} = k\,\frac{(Ze)e}{r}$$

$$\therefore V = \frac{-ke^2}{r} \qquad (12)$$

اذا الطاقة الكلية تساوي

$$E = \frac{ke^2}{2r} + \left(\frac{-ke^2}{r}\right) \Rightarrow\Rightarrow E = -\frac{ke^2}{2r} \qquad (13)$$

$$\therefore r = -\frac{ke^2}{2E} \qquad (14)$$

وبمساواة المعادلتين (14) مع (9) نحصل على

$$-\frac{ke^2}{2E} = \frac{n^2h^2}{4\pi^2 mke^2}$$

$$E = -\frac{2\pi^2 mk^2e^4}{n^2h^2} \qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}$$

$$E = -\frac{2\pi^2 me^4}{16\pi^2\varepsilon_o^2 n^2h^2} \qquad \boxed{\therefore E = -\frac{me^4}{8\varepsilon_o^2 n^2h^2}}$$

وبإعادة Z الى المعادلة نحصل على

$$\boxed{E = -\frac{Z^2 me^4}{8\varepsilon_0^2 n^2 h^2}}$$

وبالتعويض عن الثوابت نحصل على الطاقة بالإلكترون فولت.

$$E = -\frac{13.6}{n^2} ev$$

نلاحظ من هذه المعادلة ان الطاقة تتناسب عكسيا مع مربع العدد المداري الرئيسي (n) والاشارة السالبة تشير الى بذل جهد لتحرير الالكترون من جذب النواة فمستوى الطاقة (n=1) يمثل الحالة الارضية والحالة المستقرة، اما n=2, 3, 4,... تشير الى المستويات غير المستقرة فاذا اقترب العدد الكمي من المالانهاية هذا يعني ان طاقة المستويات تقترب من الصفر وان طاقة الالكترون تصبح صفرافالالكترون في هذه الحالة يكون طليقا غير مقيد بالمجال الكهربائي للنواة. وتعرف الطاقة اللازمة لازالة الكترون من المستوى الارضي الى المستوى المالانهاية بجهد التاين.

فجهد التايين لذرة الهيدروجين (13.6 eV)

$$n = 1 \Rightarrow E_1 = -\frac{13.6}{1^2} = -13.6ev$$

$$n = 2 \Rightarrow E_2 = -\frac{13.6}{2^2} = -3.4ev$$

$$n = 3 \Rightarrow E_3 = -\frac{13.6}{3^2} = -1.5ev$$

$$n = 4 \Rightarrow E_4 = -\frac{13.6}{4^2} = -0.8ev$$

$$n = \infty \Rightarrow E_\infty = -\frac{13.6}{\infty^2} = 0$$

لحساب انصاف اقطار المدارات الالكترونية

$$r = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 mke^2}$$

نصف قطر المدار n=1 (اصغر مدار) بعد التعويض

$$r = a_o = 0.529 \times 10^{-10} m = 0.529 A^o$$

وفق الافتراض الثاني لبور فان المدارات لها طاقات محددة فانتقال الالكترون من مدار الى اخر سوف يصاحبه اكتساب او فقدان طاقة

$$\upsilon = \frac{E_i - E_f}{h} \qquad E_n = -\frac{k^2 2\pi^2 me^4}{n^2 h^2}$$

$n_i$ يمثل المدار الابتدائي و $n_f$ يمثل المدار النهائي

$$\upsilon = \frac{k^2 2\pi^2 me^4}{h^3}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

$$k' = \frac{1}{\lambda} = \frac{\upsilon}{c}$$

K' العدد الموجي، ولكتابة المعادلة بدلالة العدد الموجي k'

$$k' = \frac{k^2 2\pi^2 me^4}{ch^3}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

$$k' = R_H\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

$R_H$ يمثل ثابت ريدبرك

هناك خمس متسلسلات لخطوط طيف الهيدروجين

١- متسلسلة لايمان:- وتنتج نتيجة الانتقال الالكترون من n>1 الى n=1

$$k' = R_H \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$ $n_i$=2, 3 ,4 …….

٢- متسلسلة بالمر:- ونحصل عليها من انتقال الالكترون من n>2 الى n=2

$$k' = R_H \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$ $n_i$=3, 4, 5……..

٣- متسلسلة باشين:- ونحصل عليها من انتقال الالكترون من n>3 الى n=3

$$k' = R_H \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$ $n_i$=4, 5, 6……..

٤- متسلسلة براكيت:- ونحصل عليها من انتقال الالكترون من n>4 الى n=4

٥- متسلسلة بفوند:- ونحصل عليها من انتقال الالكترون من n>5 الى n=5

مثال\ احسب طول موجة الفوتون المنبعث عندما تنتقل ذرة الهيدروجين من n=3 الى n=2.

## الاشعة السينية x-Ray

اكتشفت هذه الاشعة من قبل وليام رونتجن بطريق الصدفة حيث لاحظ اثناء دراسته لظاهرة التفريغ الكهربائي خلال الغازات لاحظ ظهور اشعة لها القابلية لاختراق الحواجز بعد ان قام بتفريغ انبوبة من الهواء وربط قطبي الانبوبة في نهاية ملف حث كبير والانبوبة تكون مغلقة بورق معتم في غرفة مظلمة وكانت لديه شاشات من الورق المطلي بسيانيد الباريوم البلاتيني فأثناء عملية التفريغ الكهربائي لاحظ ظهور بريق وفلورة على الشاشة عند كل تفريغ على الوجه المطلي للشاشة المواجهة للأنبوب والوجه الاخر وتظهر هذا حتى لو كانت الشاشة على بعد مترين.

خواص الاشعة السينية

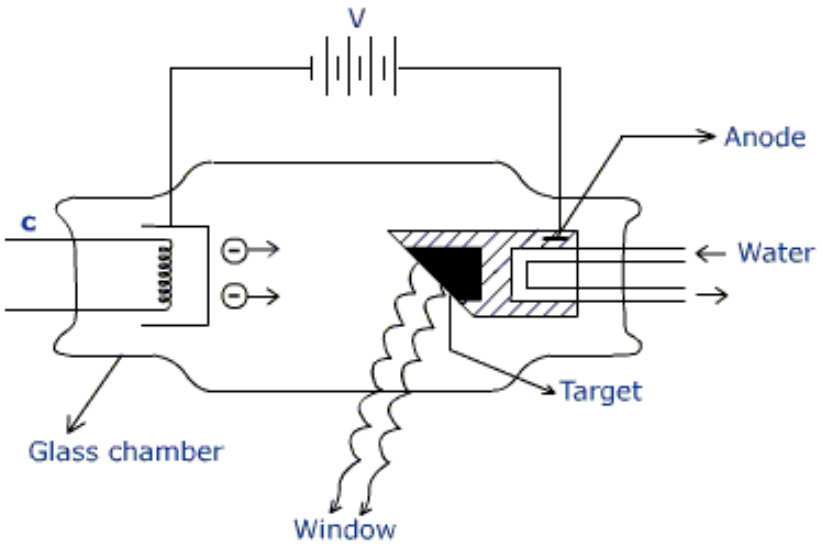
١- تحدث الأشعة السينية نتيجة التفريغ الكهربائي خلال الاجسام المشحونة سواء كانت الشحنة سالبة او موجبة

٢- لا تتأثر الاشعة السينية بالمجال الكهربائي والمغناطيسي وتسير بخطوط مستقيمه.

٣- لا تتأثر الشاشة المتفلورة بسيانيد الباريوم البلاتيني واملاح الكالسيوم وزجاج البورانيوم بالأشعة السينية.

٤- الاشعة السينية لا تنعكس ولا تعاني انكسار فيكون جمعها او تشتيتها بواسطة العدسات صعبا الا في ظروف خاصة يمكن ان تنعكس او تنكسر.
٥- الالواح الفتوغرافية والافلام تكون سريعة التأثر بهذه الاشعة.
٦- لها القابلية على اختراق المواد بنسب متفاوتة فمثلا لوح من الخشب سمكه 3cm يمكن للأشعة السينية من اختراقه بسهولة وذا استبدل بلوح من الالمنيوم سمكه 1.5cm فان الاشعة السينية سوف تضعف الى حد كبير.

## عملية توليد الاشعة السينية




توجد انواع متنوعة ومتطورة لتوليد الاشعة السينية فبعد تسليط فرق جهد عالي من الكاثود والانود يتولد اشعة كاثودية وهي عبارة عن الكترونات ذات سرعة عالية فالأشعة السينية تتولد عندما تصطدم الالكترونات اكثر من تصادم عرضي مع جسيمات المادة يفقد معظم او جميع طاقتها بالتصادم بهذه الالكترونات وتصبح متباطئة لتولد خلال ذلك اشعة سينية. وتعتبر هذه الظاهرة معكوس للظاهرة الكهروضوئية.

تتحول الطاقة الحركية للإلكترونات للفوتونات وبتردد عالي وطول موجي قصير

$$h\upsilon = \frac{hc}{\lambda} \qquad (1)$$

$$T = ev \qquad (2)$$

ان فرق الجهد المسلط على الجهاز يقدر بعشرات او مئات الكيلو فولت وتعتبر مقياس للطاقة الحركية.

$$h\upsilon_{\max} = T \qquad (3)$$

$$\frac{hc}{\lambda} = ev \qquad (4)$$

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{ev}$$

فعند تسليط فرق جهد مقداره 5000 volt يكون الطول الموجي

$$\lambda = \frac{hc}{ev} = \frac{6.624\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{1.6\times10^{-19}\times5\times10^{4}} = 2.5\times10^{-11}m = 0.25A^{o}$$

$$\upsilon_{\max} = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\times10^{8}}{2.5\times10^{-11}} = 1.2\times10^{19}Hz$$

لا بد من الاشارة الى ان هناك طريقتين لتحرير الاشعة السينية

اولا- تصطدم الالكترونات ذات طاقة عالية بالذرات في هدف معين فان الالكترونات تنتقل من القشرات الداخلية للذرات حيث تسقط الكترونات اخرى داخل هذه الثغرات فتنبعث فوتونات الاشعة السينية.

ثانيا- عندما يقصف الهدف بإلكترونات تنبعث الاشعة السينية نتيجة تباطء مفاجئ.

## الاطياف المميزة للأشعة السينية

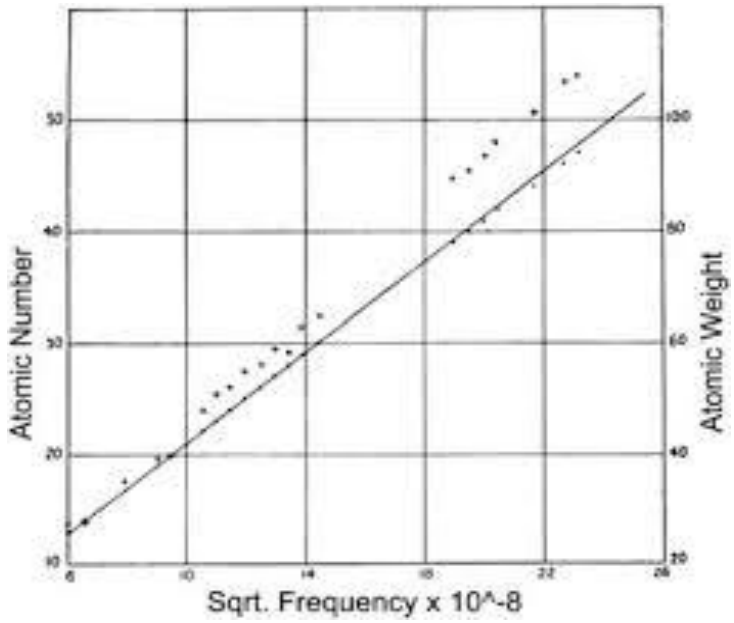
للأشعة السينية نوعين من الاطياف هما

١- الطيف المستمر
٢- طيف الخطوط الحادة (مركبة فوق الطيف المستمر)

فالطيف المستمر ينشأ عن الالكترونات التي تتعجل في مجال قوة كولوم لنوى ذرات الهدف. سنتطرق في هذا الموضوع بشكل تفصيلي حول طيف الخطوط الحادة للأشعة السينية. قام موزلي في سنة ١٩١٣ باول دراسة منسقة للأطياف المميزة للأشعة السينية للعناصر وقد استخدمت في هذه التجربة التي اجراها موزلي ثمان وثلاثون عنصرا مختلفا كأهداف في انابيب للأشعة السينية وحللت الاشعة الصادرة عن كل هدف بواسطة مطياف احادي البلورة وسجل الطيف على لوح فوتوغرافي وكانت البلورة المستخدمة هي فير سيانيد البوتاسيوم ، ووضع الجهاز واللوح الفوتوغرافي داخل حجرة مفرغة من الهواء لتفادي امتصاص الاشعة الطويلة الموجي من قبل الهواء.

وقد اظهرت الالواح الفوتوغرافية بان الخطوط الطيفية المنبعثة هذه العناصر تنتمي الى متسلسلتين مختلفتين واحدة في منطقة الموجة القصيرة تعرف بمتسلسلة K والثانية في منطقة موجتها طول نسبيا تعرف بمتسلسلة L.

وقد وجد موزلي ان صفات المتسلسلة الواحدة تكاد تكون نفسها للعناصر المختلفة وان تردد اي خط من خطوط المتسلسلة يتغير بصورة منتظمة من عنصر الى عنصر في الجدول الدوري. وعندما رسم موزلي منحنيا بيانيا بين الجر التربيعي لتردد الخط $K_\alpha$ وبين العدد الذري للعنصر الباعث لذلك الخط ومنحنيا بيانيا اخرا بين $\sqrt{f_{K_\alpha}}$ وبين الوزن الذري للعنصر حصل على خط مستقيم في الحالتين غير ان النقاط البيانية في الاول كانت جميعها على خط مستقيم اما النقاط في البياني الثاني لم تكن على استقامة واحدة كما في الشكل التالي:




ومن هذه النتائج تمكن موزلي من استنتاج النتائج المهمة التالية

١- يجب ترتيب العناصر في الجدول الدوري حسب اعدادها الذرية Z وليس حسب اوزانها الذرية كما كان متبع قبل قيام موزلي بتجربته ، وعليه يجب ان يكون عنصر الكوبلت Co (عدده الذري (Z=27) ووزنه (58.933) قبل عنصر النيكل Ni عدده الذري (Z=28) ووزنه (58.70) في الجدول الدوري بالرغم من ان الوزن الذري للكوبلت اكبر من الوزن الري للنيكل.

٢- يجب ان تحتل الاماكن الفارغة لبعض الاعداد الذرية عناصر لها نفس هذه الاعداد وبذلك تنبأ موزلي بوجود عناصر اخرى كانت مجهولة في ذلك الوقت فمثلا تنبأ لعناصر اعدادها الذرية Z=21, 43, 61 والتي اكتشفت فيما بعد وهي سكانديوم Sc (Z=21) وتكنيسيوم Te (Z=43) وبروميثيوم Pm (Z=61)

٣- ان معادلة اي خط من الخطوط المستقيمة الناتجة من رسم $\sqrt{f}$ كدالة للعدد الذري للعنصر بالتقريب

$$f = a(Z - b)^2 \qquad (1)$$

a and b constants and equal

$$b \simeq 1$$

$$a = \frac{3}{4}Rc \qquad (2)$$

هذه الكميات للخط $K_\alpha$ اما الخط $L_\alpha$ فهي

$$b \simeq 7.4$$

$$a = \frac{5}{36}Rc \qquad (3)$$

حيث تمثل c سرعة الضوء و R ثابت ريد برك ($R=1.097*10^7\ m^{-1}$) وعلية يمكن كتابة المعادلة (1)على النحو التالي

$$f_{K_\alpha} = \frac{3}{4}Rc(Z - 1)^2 \qquad (4)$$

Eq(4) for $K_\alpha$ line

$$f_{L_\alpha} = \frac{5}{36}Rc(Z - 7.4)^2 \qquad (5)$$

Eq(5) for $L_\alpha$ line

اجرى موزلي تجاربه بعد اعلان نظرية بور لذرة الهيدروجين مباشرة وقد وجد علاقة تربط نتائج تجاربه وهذه النظرية وتظهر هذه العلاقة بوضوح عند كتابة المعادلتين (4) (5) وعلى النحو التالي

$$f_{K_\alpha} = Rc(Z - 1)^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) \qquad (6)$$

$$f_{L_\alpha} = Rc(Z - 7.4)^2\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) \qquad (7)$$

وتفسي المعادلة (6) على اساس نظرية بور هو ان الخط $K_\alpha$ ينبعث عندما ينتقل الالكترون من مدار عدده الكمي الرئيسي n=2 (الغلاف L ) الى مدار عدده الكمي الرئيسي n=1 (الغلاف K ).

غير ان مثل هذه الانتقال لا يتم بسبب قاعدة باولي للاستبعاد الا اذا كان الغلاف K فاقدا لاحد الالكترونين الموجودين فيه.

نستنتج من هذا ما يلي خلال عمل انبوبة الاشعة السينية يقتلع جسيم من الاشعة الكاثودية احد الالكترونين من الغلاف K وهذا الالكترون المقتلع قد يحتل احد المدارات الخارجية للذرة او يتركها نهائيا ونتيجة لذلك لا يبقى في الغلاف K سوى الكترون واحد فان انتقال الكترون من الغلاف L الى K سوف يؤدي الى انبعاث فوتون تردده يساوي للخط $K_\alpha$

مثال\ احسب طول موجة وطاقة الخط $K_\alpha$ والخط $L_\alpha$ في الفضة (Z=47).

الحل\ باستخدام المعادلتين (4) و (5) بالنسبة للخط $K_\alpha$

$$f_{k\alpha} = \frac{3}{4}Rc(Z-1)^2 = \frac{3}{4}\times 1.0974\times 10^7 \times 3\times 10^8 (47-1)^2 = 5.225\times 10^{18}\,\sec^{-1}$$

$$\lambda_{k\alpha} = \frac{c}{f_{k\alpha}} = \frac{3\times 10^8}{5.225\times 10^{18}} = 0.5742\times 10^{-10} m = 0.5742 A^o$$

$$E_{k\alpha} = hf_{k\alpha} = 6.625\times 10^{-34}\times 5.225\times 10^{18} = 34.616\times 10^{-16} J = 21.635 KeV$$

اما بالنسبة للخط $L_\alpha$

$$f_{L\alpha} = \frac{5}{36}Rc(Z-7.4)^2 = \frac{5}{36}\times 1.0974\times 10^7 \times 3\times 10^8 (47-7.4)^2 = 0.717\times 10^{18}\,\sec^{-1}$$

$$\lambda_{k\alpha} = \frac{c}{f_{L\alpha}} = \frac{3\times 10^8}{0.717\times 10^{18}} = 4.184\times 10^{-10} m = 4.184 A^o$$

$$E_{L\alpha} = hf_{L\alpha} = 6.625\times 10^{-34}\times 0.717\times 10^{18} = 4.75\times 10^{-16} J = 2.97 KeV$$

مثال\ ماهي الطاقة اللازمة لتهيج ذرات الكادميوم (Z=48) لكي تظهر متسلسلة L للأشعة السينية وماهي الطاقة اللازمة لظهور جميع المتسلسلات

الحل\ الجزء الاول من السؤال نستخدم المعادلة (7)

$$f_L = Rc(Z-7.4)^2\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{\infty^2}\right)$$

$$E_L = hf_L = \frac{1}{4}hRc(Z-7.4)^2$$

$$E_L = \frac{1}{4}\times 6.625\times 10^{-34}\times 1.0974\times 10^7\times 3\times 10^8(48-7.4)^2 =$$
$$= 8.988\times 10^{-16}J = 5.62KeV$$

اما لظهور جميع المتسلسلات يجب ان ان تظهر المتسلسلة K ولذلك نستخدم المعادلة (6)

$$f_k = Rc(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{\infty^2}\right)$$

$$E_k = hf_k = hRc(Z-1)^2$$

$$E_k = 6.625\times 10^{-34}\times 1.0974\times 10^7\times 3\times 10^8(48-1)^2 =$$
$$= 48\times 10^{-16}J = 30KeV$$

الطاقة اللازمة لظهور جميع المتسلسلات في الكادميوم.

## مستويات الطاقة للاشعة السينية

ان من المعروف لدينا ان المدار n=1 (الغلاف K) للذرة المتعادلة يحتوي على الكترونيين والمدار n=2 (الغلاف L) يحتوي على 8 الكترونات والمدار n=3 يحتوي على 18 الكترون وهكذا حسب العلاقة التالية

$2n^2$= number of electrons in shell (n)

فعند سقوط اشعة كاثودية على ذرة كهذه وكانت طاقتها كافية لأبعاد احد الكتروني الغلاف K خارج الذرة تماما فان الذرة المتبقية تكون في مستوى طاقة اعلى من الصفر (وهو اوطأ

مستوى للطاقة في الذرة المتعادلة ويسمى بالمستوى الارضي) بمقدار $E_k$ (وهي الطاقة اللازمة لازالت احد الكتروني الغلاف K)

اما اذا كانت طاقة الاشعة الكاثودية الساقطة على الذرة غير كافية لأبعاد احد الكتروني الغلاف K ولكنها كافية لأبعاد احد الكترونات الغلاف L وقذفه خارج الذرة فان الذرة المتبقية تكون في مستوى اعلى من مستوى الطاقة الارضي بمقدار $E_L$ وهكذا بالنسبة للمستويات M و N و .....الخ.

وبمان الكتروني الغلاف K اقرب من L و M و N .....فان طاقة ترابط الكتروني الغلاف K تكون اكبر من L و M ... اي ان

$E_K > E_L > E_M > E_N$ .....

لنفرض الان ان ذرة معينة قد فقدت احد الكتروني الغلاف K اي انها في حالة الطاقة $E_k$ فعند انتقال الكترون من الغلاف L الى الغلاف K تصبح الذرة في حالة الطاقة $E_L$ وبسبب هذا الانتقال، اي تغير حالة طاقة الذرة من $E_k$ الى $E_L$ ادى الى انبعاث خط الطيف $K_\alpha$ بتردد مقداره وفق فرضية بور

$$f_{k\alpha} = \frac{E_k - E_L}{h} \qquad (8)$$

وهناك احتمال اخر لانتقال الكترون من الغلاف M الى K مباشرة تاركا الذرة في حالة الطاقة $E_M$ والخط المنبعث في هذه الحالة هو خط الطيف $K_\beta$ وتردده هو

$$f_{k\beta} = \frac{E_k - E_M}{h} \qquad (9)$$

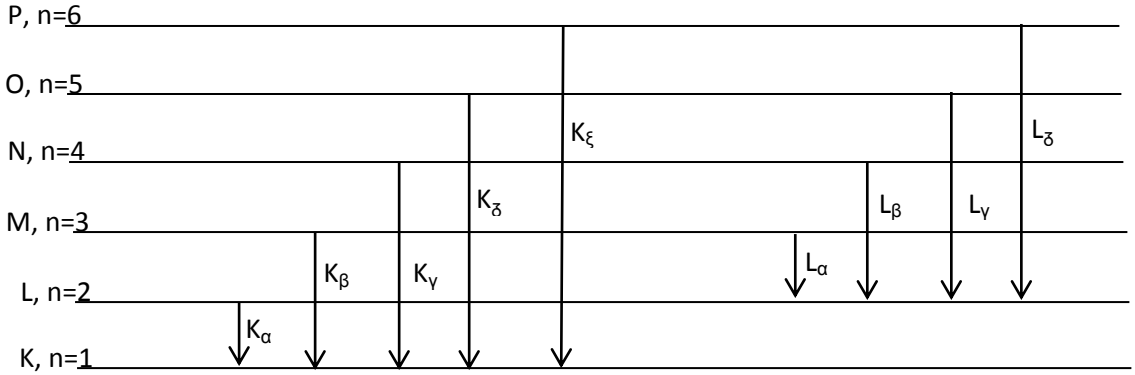
او من N الى K فيكون تردده هو

$$f_{k\gamma} = \frac{E_k - E_N}{h} \qquad (10)$$

وبمناقشات مماثلة يمكن تفسير المتسلسلات L و M و N فمثلا اذا كانت الذرة في حالة الطاقة $E_L$ وانتقل الالكترون من الغلاف M الى L ينبعث خط الطيف $L_\alpha$ بتردد

$$f_{L\alpha} = \frac{E_L - E_M}{h} \qquad (11)$$

وعندما يكون فرق الجهد بين نهايتي انبوب الاشعة السينية عالي تكون طاقة الاشعة الكاثودية كافية لرفع عدد كبير من ذرات الهدف الى حالة الطاقة $E_k$ وذرات اخرى الى طاقة $E_L$ و $E_M$ و $E_N$ وهكذا تنبعث خطوط طيف المتسلسلة K من الذرات التي تنتقل فيها الالكترونات مباشرة من الاغلفة L و M و N الى الغلاف K وتنبعث خطوط الطيف للمتسلسلات L و M و N بنفس الطريقةكماهو مبين في الشكل التالي:




وقد وجد ان خط الطيف $K_\alpha$ هو اشد خطوط المتسلسلة K ويليه خط الطيف $K_\beta$ ولما كانت شدة خط الطيف تتناسب مع عدد الذرات التي يحدث فيها الانتقال الذي ينتج عنه ذلك الخط فان الانتقال الذي يحدث بكثرة للذرات في حالة الطاقة $E_k$ هو انتقال الالكترونات من الغلاف L الى K اكبر من احتمال الانتقال من M الى K وهكذا ونفس الحالة بالنسبة للمتسلسلات L و M و N .....

ولإزالة الكترون من احد الاغلفة يجب على الاشعة الكاثودية ان تصدم هذا الالكترون ولما كان نصف قطر الغلاف K اصغر من نصف قطر الغلاف L وهذا اصغر من M .....الخ لذلك يكون الالكترونات في الغلاف K اقرب الى بعضها من الغلاف L . ولذلك نتوقع احتمالية تصادم الاشعة الكاثودية مع الكترونات الغلاف K اكثر من L ومن M ..... وهذا هو سبب ظهور خط الطيف $K_\alpha$ اكثر شدة من $L_\alpha$ و $L_\alpha$ اكثر شدة من $M_\alpha$ .....

وباستخدام اهزة متطورة وحديثة لدراسة طيف الاشعة السينية نجح العلماء في تحليل كثير من الخطوط الى مركبتين فمثلا حلل الخط $K_\alpha$ الى $K_{\alpha1}$ و $K_{\alpha2}$.

مثال\برهن على ان

$$\lambda_{k\beta} = \frac{\lambda_{k\alpha}.\lambda_{L\alpha}}{\lambda_{k\alpha} + \lambda_{L\alpha}}$$

ثم احسب طول موجة الخط $K_\beta$ في موليبدنوم (Z=42).

الحل\ من المعادلتين (8) و (11) لدينا

$$hf_{k\alpha} = E_k - E_L$$
$$hf_{L\alpha} = E_L - E_M$$

وبجمع هاتين المعادلتين نحصل على

$$hf_{k\alpha} + hf_{L\alpha} = E_k - E_M$$

$$E_k - E_M = hf_{k\beta} \Longrightarrow\Longrightarrow hf_{k\beta} = hf_{k\alpha} + hf_{L\alpha}$$

ومنها ينتج

$$\frac{c}{\lambda_{k\beta}} = \frac{c}{\lambda_{k\alpha}} + \frac{c}{\lambda_{L\alpha}}$$
$$\frac{1}{\lambda_{k\beta}} = \frac{\lambda_{L\alpha} + \lambda_{k\alpha}}{\lambda_{k\alpha}.\lambda_{L\alpha}}$$
$$\therefore \lambda_{k\beta} = \frac{\lambda_{k\alpha}.\lambda_{L\alpha}}{\lambda_{L\alpha} + \lambda_{k\alpha}}$$

وقيم $\lambda_{L\alpha}$ و $\lambda_{k\alpha}$ هي $\lambda_{L\alpha}= 5.23\ A^o$ و $\lambda_{k\alpha}= 0.721\ A^o$

كما يمكن تعيين هاتين القيمتين من المعادلتين (4) و (5)

$$\therefore \lambda_{k\beta} = \frac{\lambda_{k\alpha}.\lambda_{L\alpha}}{\lambda_{L\alpha} + \lambda_{k\alpha}} = \frac{0.721\times 5.423}{0.721+5.423} = 0.6364A^o$$

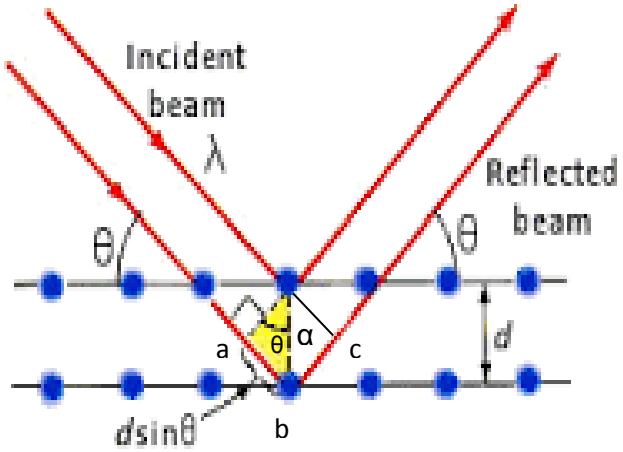
## حيود الاشعة السينية

فشل روتنجر في التعرف على طبيعة الاشعة السينية فهي لا تتاثر بالمجال الكهربائي والمغناطيسي ، لا تحتوي على شحنات وفي نفس الوقت لا تظهر فيها طبيعة موجية لا نها لا تتداخل ولا تحيد عند مرورها بالمحززات. واستطاع العالم لوي من التعرف على طبيعة هذه الاشعة وثبت انها موجات كهرومغناطيسية وان سبب عدم تداخلها او حيودها عند مرورها خلال المحزز هو قصر طول موجتها المتناهي.

$$\sin\theta = \frac{n\lambda}{d}$$

اذا كانت λ صغيرة جدا عند مقارنتها بثابت المحزز d فان زاوية الحيود يجب ان تكون صغيرة جدا الا اذا كانت الرتبة عالية فلما كانت المرتبة غير عالية ادى الى فشل المحززات في توليد حيود الاشعة السينية ( اذا كانت λ صغيرة فيعني عدم امكانية الحصول على حيود محسوس للأشعة السينية فقام العالم لوي بإمرار حزمة ضيقة من الاشعة السينية في بلورة ملح الطعام حيث انه استخدم بلورات ذات تراكيب ذرية او جزيئية منتظمة لتحل محل المحززات الاعتيادية والفواصل بين الذرات او الجزيئات للبلورة هب ب $A^o$ وظهر نمط حيود على شكل بقع مرتبة بطريقة معينة مما يثبت ان الاشعة لها حركة موجية ولها طول موجي قصير واثبت ان البلورات مرتبة بصورة منتظمة.

وبعدها درس العالم بران كيفية استطارة الاشعة عن المستويات المتوازية للبلورات التي ينتظم فيها عدد كبير من الذرات احدى العلاقات التي يجب ان تحقق التقوية (التداخل البناء).




فلكي يحدث التداخل البناء يجب ان يكون ab+bc يساوي عدد صحيح من الاطوال الموجية

$$ab + bc = n\lambda$$

$$ab = d\sin\theta \qquad bc = d\sin\alpha$$
$$\therefore d\sin\theta + d\sin\alpha = n\lambda$$

في حالة $\theta=\alpha$

$$2d\sin\theta = n\lambda$$

## النظرية الموجية والجسيمات

المقصود ان الاشعة تتصرف في بعض التجارب وكأنها حركة موجية واخرى كأنها حركة جسيمية. الحالة الاولى تعتمد على المسار او المسارات التي يمر بها الضوء كما في تجربة التداخل الذي يحسب فيه فرق المسار وممكن القول على ان الضوء او الاشعة الكهرومغناطيسية تتصرف كموجة في الانعكاسات والانكسارات والتداخل والحيود والاستقطاب.

الحالة الثانية ، كشفت الظاهرة الكهروضوئية ان طبيعة الطاقة الضوئية هي جسيمات وتنبعث عن مصدر ضوئي تردده $\upsilon$ وهي فوتونات ذات طاقات منفصلة وتتصرف كجسيمات. اذا خلاصة القول ان الفوتونات ذات طبيعة مادية مرة وذات طبيعة موجية مرة اخرى اي حسب الظروف التي يتعرض لها الفوتون.

## فرضية دي برولي

استنادا لمعادلة التي تربط الطاقة والزخم وفق النظرية النسبية

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\upsilon}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

$$\therefore \lambda = \frac{h}{p}$$

فافترض دي برولي ان المعادلة اعلاه هي قانون عام يشمل الفوتونات والجسيمات المادية فذا كان الضوء يتصرف في بعض الاحيان كموجة وفي احيان اخرى كجسيمات، فان الجسيمات كالإلكترونات والبروتونات والذرات والجزيئات يجب ان تتصرف بطريقة مماثلة اي يجب ان يرفقها خاصية موجية معينة.

افترض دي برولي زخم جسم كتلته m هو p وسرعته v وعلية يكون طول موجة دي برولي المرافقة لحركة الجسيم هي

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

مثال\ احسب طول الموجة المصاحبة لجسيم كتلته 1kg يتحرك بسرعة $2 \times 10^3$ m/sec .

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.625\times10^{-34} J.\sec}{1kg \times 2\times10^3 m/\sec} = 3.32\times10^{-37} m$$

## دالة الموجة $\psi$

هي كمية متغيرة تعبر عن الموجة وان قيمة هذه الدالة تعتمد على احتمالية وجود الجسيم المتحرك في المكان (x,y,z) وعند الزمن t وان احتمالية وجود الجسيم ذات الدالة الموجية $\psi$ عند الموقع (x,y,z) والزمن t تتناسب مع $|\psi|^2$

في نفس المكان والزمان و $|\psi|^2$ هي مربع القيمة المطلقة للدالة الموجية وتدعى بكثافة الاحتمالية. عندما تكون الدالة الموجية $\psi$ هي كمية معقدة حيث تكون من جزء حقيقي وجزء خيالي فان دالة الموجة تمثل

$$\psi = A + iB \Longrightarrow\Longrightarrow \psi\psi^* = A^2 - i^2B^2 = A^2 + B^2$$

$$i = \sqrt{-1}$$

## سرعة موجة دي برولي

اذا كان الجسم متحرك سوف ترافقه موجة سرعة هذه الموجة

$$\omega = \upsilon\lambda$$

$\omega$ *wave velocity*

وهذه تحدد بسرعة الجسيم ، نلاحظ لن سرعة انتشار موجة دي برولي اسرع من الضوء وهذه الفكرة لا تتناقض مع النظرية النسبية التي تمنع من وصول سرعة الجسم الى سرعة الضوء لان النظرية النسبية تؤكد على ان السرعة هي المسؤولة عن نقل الكتلة والطاقة بينما سرعة الموجة المرافقة غير مسؤولة عن نقل الكتلة والطاقة

$$E = h\upsilon \qquad \upsilon = \frac{E}{h} = \frac{mc^2}{h}$$

$$\omega = \frac{mc^2}{h} . \frac{h}{mv} = \frac{c^2}{v}$$

ولكي نفهم هذه النتيجة لابد من فهم سرعة الموجة وسرعة مجموعة الامواج. لنتصور هناك حبل مشدود على المحور x واجزائه تتذبذب بحركة توافقية بسيطة فعند الزمن t=0 و x=0 وهذه تمثل قبل البدء بالاهتزاز وقمنا بهز الحبل فالموجة تتحرك بمسافة

$$x = \omega t$$

في الزمن t والفترة الفاصلة بين x=0 وحتى وصول الى النقطة x

$$t = \frac{x}{\omega}$$

فنلاحظ ان الازاحة y عند النقطة x والزمن t تساوي الازاحة y عند النقطة x=0 واللحظة $t = \frac{x}{\omega}$ فبعد التعويض

$$y = A\cos\omega t \qquad y = A\cos 2\pi\upsilon t$$

$$y = A\cos 2\pi\upsilon(t - \frac{x}{\omega}) = A\cos 2\pi\left(\upsilon t - \frac{\upsilon x}{\omega}\right)$$

$$y = A\cos 2\pi(\upsilon t - \frac{x}{\lambda}) = A\cos\left(2\pi\upsilon t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$y = A\cos\left(\omega t - kx\right) = A\cos\left(\omega t - kr\right)$$

معادلة تمثل بدلالة الاحداثيات الثلاث k العدد الموجي اما r متجه نصف القطر

## مبدأ عدم التحديد

بين العالم هايزنبرك بانه لايمكن تعيين موقع وزخم الجسيم انيا وبدقة واستند هذا المبدأ على ان هذه الكمية تحدد وبدقة وأن واحد حسب العلاقة التالية

$$\Delta x\,\Delta p \geq \hbar \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$\Delta x$ تمثل اللاتحديد في موقع الجسيم و $\Delta p$ تمثل اللاتحديد في زخم الجسيم وتعرف هذه المعادلة بانها حاصل ضرب الخطء $\Delta x$ في موقع الجسيم والخطء $\Delta p$ في زخم الجسيم في قياس x و p هو اكبر او يساوي $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

$$\Delta y\,\Delta p_y \geq \hbar$$

نفرض مجموعة موجية تقابل جسيم يقع ضمن المسافة $\Delta x$

$$\Delta x\,\Delta k = 1 \qquad (1)$$

$$\lambda = \frac{h}{p} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi p}{h}$$

$$\Delta k = \frac{2\pi\Delta p}{h} \qquad (2)$$

وبتعويض (2) في (1) نحصل على

$$\Delta x\,\Delta p = \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

اذا اريد قياس طاقة E منبعثة من عملية ذرية خلال فترة زمنية $\Delta t$ اذا كانت الطاقة تنبعث بشكل موجات كهرومغناطيسية فان عملية تحديد الفترة الزمنية سوف يؤثر على قياس تردد الموجة

$$\Delta\upsilon = \frac{1}{\Delta t} \qquad \Delta E = h\Delta\upsilon = \frac{h}{\Delta t}$$

$$\Delta E\,\Delta t = h \qquad \Delta E\,\Delta t \geq \hbar$$

سؤال\ هل يمكن تواجد الالكترون داخل النواة نصف قطرالنواة $R=10^{-14}$ m وهو يمثل الخطء في موقع الجسيم

$$\Delta p = \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{1.054\times10^{-34}}{10^{-14}} = 1.1\times10^{-20}$$

$$T = pc = 1.1\times10^{-20}\times3\times10^{8} = 20MeV$$

اذا افترضنا ان الالكترون موجود داخل النواة مع العلم ان طاقة الالكترون السكونية (0.511MeV) هذا يعني انه لا يمكن ان يتواجد داخل النواة. واذا افترضنا ان الالكترون موجود داخل الذرة مع العلم ان نصف قطر الذرة حسب نظرية بور لذرة الهيدروجين هي ($R=5x10^{11}$m) وهذا يمثل الخطء في موقع الجسيم

$$\Delta p = \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{1.054\times10^{-34}}{5\times10^{-11}} = 2.1\times10^{-24}$$

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{(2.1\times10^{-24})^2}{2\times9.1\times10^{-31}} = 2.4\times10^{-18}J = 15ev$$

## معادلة شرود نجر

من اجل دراسة معادلة شرود نجر نبدأ بحركة جسيم في بعد واحد كتلته m وسرعته v فموقع الجسيم يعرض بالقيم المحددة لإحداثياته فمن الممكن التعبير عنه بالدالة الموجية التي سبق التطرق لها ، فنفترض ان دالة موجية منتشرة على المحور x

$$\psi = Ae^{i\omega\left(t-\frac{x}{\omega}\right)} \qquad (1)$$

$$\omega = 2\pi\upsilon = \lambda\upsilon$$

$$\psi = Ae^{2\pi i\left(\upsilon t-\frac{x}{\lambda}\right)} \qquad (2)$$

ومن الممكن كتابة المعادلة (2) بدلالة الزخم والطاقة

$$E = h\upsilon \qquad \upsilon = \frac{E}{h} = \frac{E}{2\pi\hbar} \qquad \lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p}$$

$$\psi = Ae^{\frac{-i}{\hbar}(Et-px)} \qquad (3)$$

بتفاضل المعادلة (3) جزئيا مرتين بالنسبة للإحداثيات x ومرة بالنسبة للزمن t نحصل على

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2}\psi \qquad (4)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar}\psi \qquad (5)$$

وبإعادة ترتيب المعادلتين (4) و (5) نحثل على

$$p^2\psi = -\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \qquad (6)$$

$$E\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad (7)$$

نلاحظ من المعادلتين (6) و (7) من الممكن استبدال الزخم $p^2$ بالعلاقة التفاضلية $-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ والطاقة E بدلالة $\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$

من المعلوم ان الطاقة الكلية E تساوي مجموع الطاقة الحركية والطاقة الكامنة

$$E = \frac{p^2}{2m} + V \qquad (8)$$

وبضرب المعادلة (8) ب $\psi$

$$E\psi = \frac{p^2\psi}{2m} + V\psi \qquad (9)$$

وعند التعويض عن $p^2\psi$ و $E\psi$ نحصل على

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+V(x)\psi \qquad (10)$$

وهذه المعادلة تمثل معادلة شرودنجر المعتمدة على الزمن

$$\psi=Ae^{\frac{-i}{\hbar}(Et-px)} \qquad \psi=\psi(x)\phi(t)$$

$$\phi(t)=e^{\frac{-i}{\hbar}(Et)}$$

$$\therefore \psi(x,y,z,t)=\psi(x,y,z)e^{\frac{-i}{\hbar}(Et)} \qquad (11)$$

وبوضع معادلة (11) في معادلة شرود نجر المعتمدة على الزمن

$$E\psi e^{\frac{-iEt}{\hbar}}=-\frac{\hbar^2}{2m}e^{\frac{-iEt}{\hbar}}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+V(x)\psi e^{\frac{-iEt}{\hbar}} \qquad (12)$$

وبقسمة المعادلة (12) على $e^{\frac{-iEt}{\hbar}}$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi=0 \qquad (13)$$

وهذه تمثل معادلة شرود نجر الغير معتمدة على الزمن، وبإدخال الاحداثيات (x,y,z) نحصل على

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi=0$$

## تطبيقات على معادلة شرود نجر

### ١- الجسم الحر:-

الجسم الحر يتحرك في مجال طاقته الكامنة تساوي صفر، و E تمثل طاقته الكلية وباستعمال معادلة شرود نجر الغير معتمدة على الزمن

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi=0$$

وبالتعويض بالطاقة الكامنة التي تساوي صفر (V=0)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=E\psi(x)$$

$$E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{p^2}{2m}=\frac{\hbar^2k^2}{2m} \qquad p=\hbar k$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+k^2\psi(x)=0$$

وحل هذه المعادلة

$$\psi(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx}$$

حيث A و B ثوابت

$e^{ikx}$ دالة تمثل حركة الجسيم باتجاه المحور x

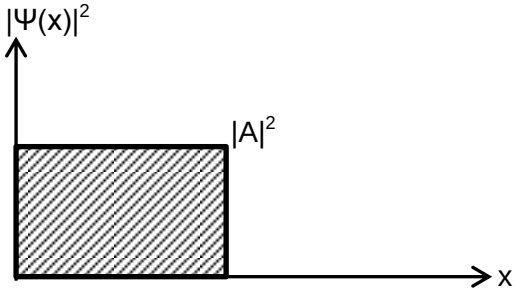
$e^{-ikx}$ دالة تمثل حركة الجسيم باتجاه معاكس للمحور x

الحالة الاولي:- عندما تكون حركة الجسيم باتجاه الموجب

$$\psi(x)=Ae^{ikx}$$

$$|\psi(x)|^2=\psi^*\psi=A^*e^{-ikx}Ae^{ikx}=|A^2|=A^*A$$

واذا رسمنا $|\psi(x)|^2$

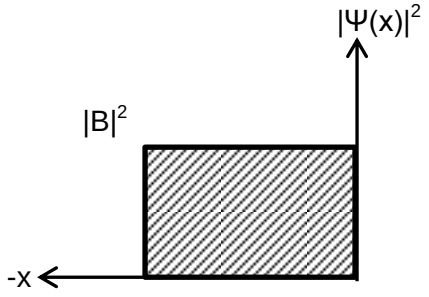


الحالة الثانية:- عندما يتحرك الجسيم باتجاه سالب

$$\psi(x) = Be^{-ikx}$$

$$|\psi(x)|^2 = \psi^*\psi = Be^{ikx}\,Be^{-ikx} = |B^2| = B^*B$$

واذا رسمنا العلاقة بين $|\psi(x)|^2$ والمحور x نحصل على كثافة الاحتمالية لوجود الجسيم ويكون بالشكل التالي




الحالة الثالثة:- عندما يتحرك الجسيم في كلا الاتجاهيين

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

$$|\psi(x)|^2 = \psi^*\psi = \left(A^*e^{-ikx} + B^*e^{ikx}\right)\left(Ae^{ikx} + Be^{-ikx}\right)$$

$$= A^*A + B^*B + BA^*e^{-2ikx} + B^*Ae^{2ikx}$$

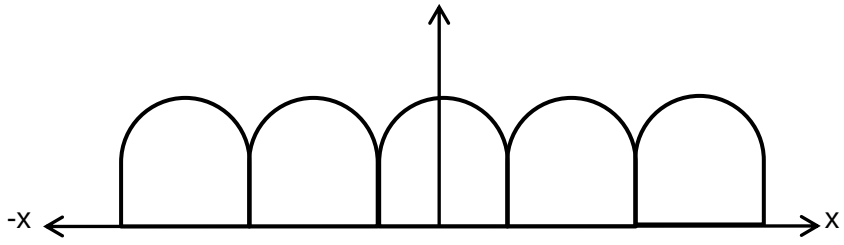
وعندما A=B

$$|\psi(x)|^2 = 2A^*A + AA^*(e^{-2ikx} + e^{2ikx})$$

$$= 2A^*A\left(1 + \frac{1}{2}(e^{-2ikx} + e^{2ikx}\right) = 2A^*A(1 + \cos 2kx)$$

$$\because 2\cos^2 kx = 1 + \cos 2kx$$

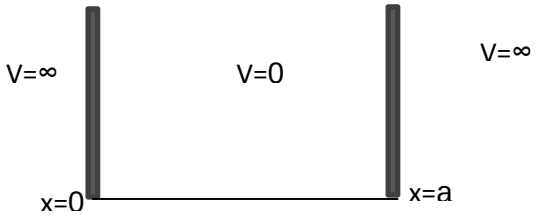
$$\therefore |\psi(x)|^2 = 4A^* A \cos^2 kx$$




وهذا يدل على عدم وجود شروط حدودية على عدم حل معادلة الجسم الحر

## ٢- جسم داخل صندوق

جسيم كتلته m وطاقته E موجود داخل صندوق عرضه a وحدوده x=0 الى x=a
وطاقته الكامنة V(x) كما موضح في الشكل التالي




V(x)=0 $0 < x < a$

V(x)=∞ $a < x < 0$

وباستخدام معادلة شرود نجر الغير معتمدة على الزمن

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} + V(x)\psi = E\psi(x)$$

الحالة الاولي:- نفترض ان الجسيم خارج الصندوق V(x)=∞

$$\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E-\infty)\psi(x)$$

بإهمال الطاقة E بالنسبة للطاقة الكامنة V(x)

$$\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} = \infty\psi \qquad \psi(x) = e^{\pm\sqrt{\infty x}} \Rightarrow \psi(x) = 0$$

في كلا الحالتين عندما x اكبر من a او اصغر من 0 فان الدالة مساوية الى الصفر اي ان احتمالية وجود الجسيم خارج الصندوق غير ممكنة.

الحالة الثانية:- عندما يكون الجسيم داخل الصندوق تكون طاقته الكامنة V(x)=0 وباستخدام معادلة شرود نجر الغر معتمدة على الزمن

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + k\psi = 0$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \qquad p = \hbar k \qquad \therefore E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

لإيجاد الثوابت A و B نستخدم الشرطين الحدوديين

First- $\psi(x=0)=0$
Second- $\psi(x=a)=0$

باستخدام الشرط الاول عندما تكون x=0

$$\psi(x=0)=A+B=0 \Longrightarrow\Longrightarrow A=-B$$

$$\therefore \psi(x)=A(e^{ikx}-e^{-ikx})$$

ومن المتطابقة المثلثية التالية

$$\sin(x)=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$$

$$\psi(x)=D\sin kx \qquad D=\frac{A}{2i}$$

الشرط الثاني عندما x=a

$$\psi(x=a)=D\sin ka=0 \Longrightarrow\Longrightarrow \sin ka=0$$

$$\therefore ka=n\pi$$

$$k=\frac{n\pi}{a}$$

n عدد صحيح موجب وبالتعويض في معادلة الشرط الاول

$$\psi(x)=D\sin\frac{n\pi x}{a}$$

عند تعويض هذه المعادلة في المعادلة الغير معتمدة على الزمن

$$\frac{\partial^2(D\sin\frac{n\pi x}{a})}{\partial x^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}(D\sin\frac{n\pi x}{a})=0$$

$$-\frac{Dn^2\pi^2}{a^2}\sin\frac{n\pi x}{a}+\frac{2mE}{\hbar^2}(D\sin\frac{n\pi x}{a})=0$$

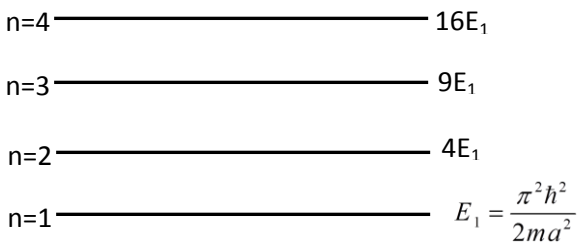
$$D\sin\frac{n\pi x}{a}\left(-\frac{n^2\pi^2}{a^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\right)=0$$

$$-\frac{n^2\pi^2}{a^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}=0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{n^2\pi^2}{a^2}=\frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\therefore E=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

نستنتج

١- نلاحظ في هذه المعادلة ان طاقة الجسيم لا تأخذ قيم اختيارية بل تكون محددة ومكممه فهذه القيم تشكل طاقة كما هو موضح في الشكل ادناه




٢- لا يمكن ان تكون n=0 لأنه في النتيجة سوف نحصل على ψ=0 وهذا يعني عدم وجود جسيم لان مربع القيمة المطلقة للدالة (كثافة الاحتمالية) لوجود الجسيم تساوي صفر وفي النتيجة ايضا الطاقة تساوي صفرا

٣- الطاقة E تتناسب مع $a^{-2}$ حيث بزيادة عرض صندوق سوف تتقارب قيم الطاقة وتقل الطاقة، وعند اقتراب من اللانهاية فان مستويات الطاقة تقترب من بعضها وتصبح متصلة وتكون مشابهه للأطياف الذرية المستمرة ونفس الشيء في حالة زيادة الكتلة.

مثال\ احسب مستويات الطاقة للإلكترونات في صندوق عرضه ($a=10^{-10}$ cm).